შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

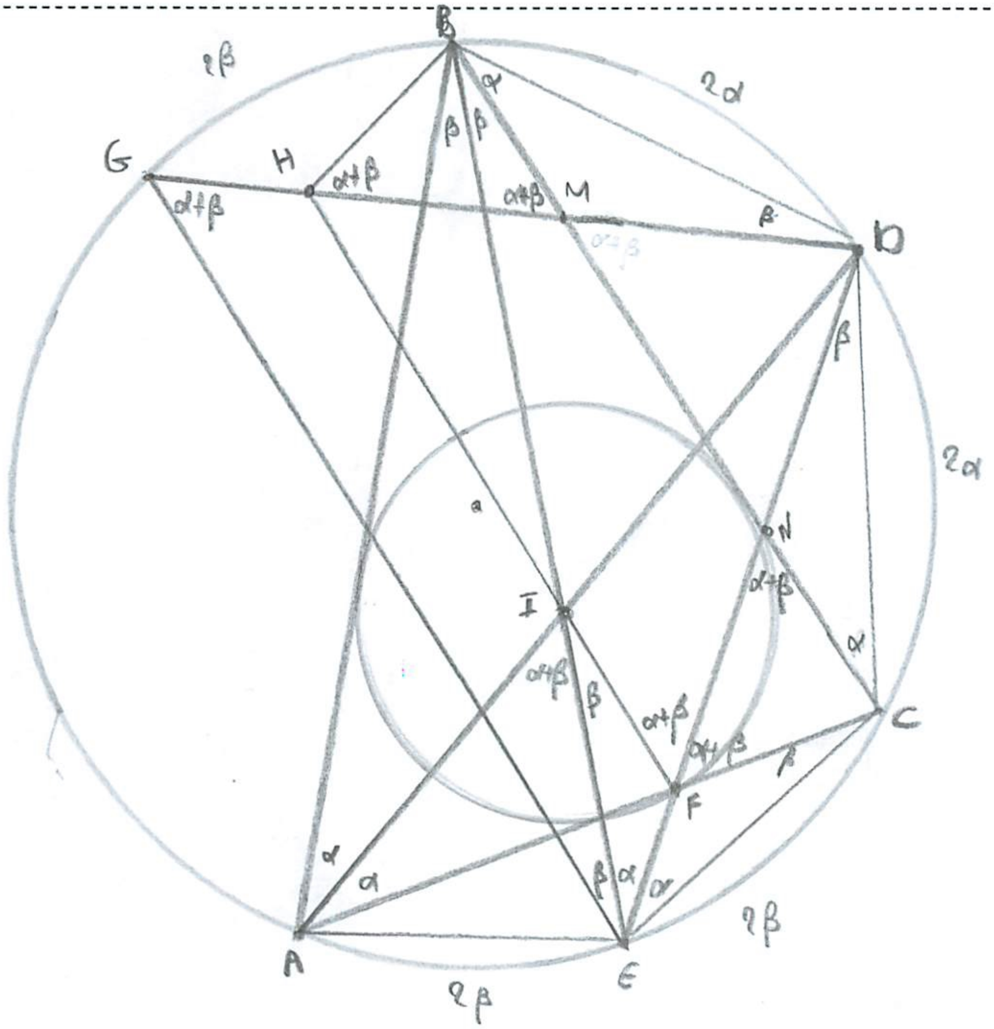
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 16

25.04.2015/ მათ/III/ 615

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



აღვნიშნოთ, რომ სადაც I ABC სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია, D იქნება $\overset{\frown}{BC}$-ის შუაწერტილი, ხოლო E იქნება $\overset{\frown}{AC}$-ის შუაწერტილი.

$\angle BAD = \angle CAD \equiv \alpha \qquad \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} = 2\alpha$

$\angle ABE = \angle CBE \equiv \beta \qquad \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} = 2\beta$

GD-ს და BC-ს გადაკვეთის წერტილს დავარქვათ M, ხოლო ED-ს და BC-ს გადაკვეთის წერტილს N.

$\angle CDE = \angle ECA = \beta$

$\angle BED = \angle BCD = \angle DEC = \angle DBC = \alpha$.

$\angle AIE = \angle EGD = \angle ENC = \alpha+\beta = \angle BMH$

~~$\angle FNC = \alpha+\beta$ (ΔCND-ს გარე კუთხე)~~ $\angle CAE = \beta$

ΔAEI ტოლფერდაა ($\angle IAE = \angle AIE$) $\Rightarrow AE = EI$.

ასევე რადგან E $\overset{\frown}{AC}$-ის შუაწერტილია $AE = EC$

საიდანაც $EI = EC$

$\Delta EIF = \Delta ECF$ (ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით)

ე.ი. $\angle EIF = \beta$. $\Rightarrow \angle IFN = \alpha+\beta$ (გარე კუთხე)

ე.ი. $IF \parallel NC$. ამიტომ $GE \parallel HF \parallel BC$.

ამიტომ $\angle EIF = \angle BEG = \beta$, საიდანაც $\overset{\frown}{BG} = 2\beta$

ანუ $\angle BDG = \beta$.

$\Delta BMD = \Delta CND$ ($BD = DC$ რადგან D $\overset{\frown}{BC}$-ის შუაწერტილია
$\angle BDM = \angle CDN$ და $\angle DBM = \angle DCN$)

მაშინ $MD = ND$ და $BM = NC$

ამოცანა № 1 გვერდი № 3

აქ შენარჩუნდება $MD=ND$ და $MN \parallel HF$,
ამიტომ თალესის თეორემით ვიღებთ, რომ $HM=NF$
ასევე ვიცით, რომ ~~BD=ND~~ $BM=NC$, $\angle BMH=\angle CNF$
ე.ი. $\triangle HBM=\triangle FCN$
საიდანაც $HB=FC=CN=BM$.
ე.ი. $\angle BHM=\angle BMH=\alpha+\beta$.
შევნიშნოთ, რომ აქ $\triangle FHD$-ზე შემოხაზული წრეწირის
$\breve{DH}$ იქნება $2\cdot\angle HFD=2(\alpha+\beta)=2\angle BHD$
ანუ $\angle BHD$ ჩახაზულია და მხების ქორდის კუთხეა
ე.ი. BH $\triangle DFH$-ზე შემოხაზული წრეწირის
მხებია რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

25.04.2015/ მათ/III/ 615

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

უტოლობა დავწეროთ შემდეგნაირად:

$(f(a_m)-a_m)(f(b_m)-b_m)<0.$

ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი m, რომ $f(a_m)>a_m$ და $f(b_m)<b_m$ ან $f(a_m)<a_m$ და $f(b_m)>b_m$, რადგან არ ერთდროულად. ანუ: $f(a_m)>a_m$ და $f(b_m)>b_m$ ან პირიქით.

~~დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ ასეთი m არ არსებობს.~~

შევნიშნოთ, რომ თუ $0<x<\frac{1}{2}$, მაშინ $f(x)>x$, ხოლო თუ $\frac{1}{2}\le x<1$, მაშინ $f(x)<x$

განვიხილოთ 3 შემთხვევა: 1) $0<a<\frac{1}{2}\le b<1$

2) $\frac{1}{2}\le a<b<1$

3) $0<a<b<\frac{1}{2}$

1) ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ მოცემული უტოლობა სრულდება, რადგან ~~[illegible]~~ $f(a)>a$ და $f(b)<b$

7

2) ვაჩვენოთ, რომ სადაც $a<b$, $a^t<b^t$ ამიტომ $f(a_k)$ უფრო მალე გახდება $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლები, ვიდრე $f(b_k)$, მაგრამ ეს ორივე ერთნაირად ხდება $\frac{1}{2}$-ს ~~[illegible]~~ შემდეგ ორივესთვის [illegible] [illegible] მტკიცება სხვა და სადაც ორივესთვის [illegible] ვარიანტები და $a \neq b$, მაშინ ერთ-ერთი უფრო ადრე [illegible] შესრულდება. (ნაწილში [illegible] [illegible] (სხვაობა) იზრდება)

3) ვაჩვენოთ რომ 1 სვლის შემდეგ ვიღებთ ~~0~~-ზე მეტი განხილულ ვარიანტს, ამიტომაც ამ შემთხვევაშიც დამტკიცება ანალოგიურია.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $x > y$ და $x = y + r$

მაშინ გვექნება:

$$7(y+r)^2 - 13y(y+r) + 7y^2 = (r+1)^3$$

საიდანაც $y^2 + r\cdot y - r^3 + 4r^2 - 3r - 1 = 0$

$$D = r^2 + 4r^3 - 16r^2 + 12r + 4 = (r-2)^2(4r+1)$$

ე.ი. იმისათვის, რომ y იყოს მთელი $4r+1$ უნდა იყოს სრული კვადრატი $4r+1 = k^2$.

რადგან $4r+1$ კენტია $k = 2m+1$

$$4r+1 = k^2 = 4m^2 + 4m + 1$$

$r = m(m+1)$ ე.ი. r ლუწია.

y-ისთვის გვექნება ფორმულა:

$y = \frac{-r \pm (r-2)\cdot k}{2}$ ხოლო x-ისთვის: $x = \frac{r \pm (r-2)k}{2}$

ცხადია x-ც და y მთელი რიცხვებია, რადგან r-ც და $(r-2)$ ლუწებია.

4

ცხადია აქ ~~[illegible]~~ განტოლების ამო-ნახსნებია x_1 და y_1, ამონახსნები იქნება $(-x_1)$-ც და $(-y_1)$-ც, ამიტომ მიღებული პასუხი შევამოწმოთ შემდეგ $y=\frac{-r+(r-2)k}{2}$ და $x=\frac{r+(r-2)k}{2}$ ავიღ.

გვაქვს
$$7\cdot\left(\frac{r+(r-2)k}{2}\right)^2-13\left(\frac{r+(r-2)k}{2}\right)\left(\frac{-r+(r-2)k}{2}\right)+$$
$$+7\left(\frac{-r+(r-2)k}{2}\right)^2=(r+1)^3$$

აქ გამოვიყენეთ [illegible] შემდეგი გვექნება:

$$7\cdot\frac{r^2+(r-2)^2\cdot k^2+2r(r-2)k+r^2+(r-2)^2k^2-2r(r-2)k}{4}-$$
$$-13\frac{(r-2)^2k^2-r^2}{4}=\frac{14\cdot 4r^3-14\cdot 14r^2+14\cdot 12r+14\cdot 4-13\cdot 4r^3+13\cdot 16r^2}{4}+$$
$$+\frac{-13\cdot 12r-13\cdot 4}{4}=\frac{4r^3+12r^2+12r+4}{4}=r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3$$

ე.ი. ყოველი [illegible] ყველა [illegible] r-ისთვის.

5

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

25.04.2015/ მათ/III/ 615

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ვაჩვენეთ, რომ (4r+1)-ის ნებისმიერი
კენტი რიცხვის კვადრატი.

$$4r+1=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$$

$$r=n(n-1) \qquad n\geq 1$$

ამ r-ის და მნიშვნელობის ჩასმით y-ის და x-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ, რომ საძიებელი x-ის და y-ის წყვილებია:

(n^3-2n^2-n+1) და (n^3-n^2-2n+1) და მათი მოპირდაპირეები

$(-n^3+2n^2+n-1)$ და $(-n^3+n^2+2n-1)$

სადაც $n\geq 1$.

6